Risoluzione problema 2

Alessia Alinovi

3 marzo 2019

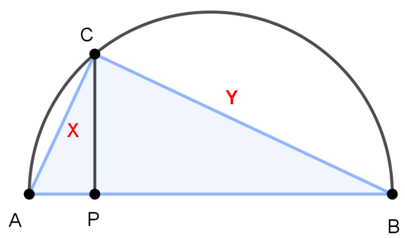
Testo

E' data una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$. Determina un punto P sul diametro $\overline{AB}$ in modo che detta C l'intersezione della semicirconferenza con la perpendicolare per P al diametro, valga la relazione $\sqrt{6} \cdot \overline{BC} + \sqrt{2} \cdot \overline{AC} = 2 \cdot \overline{AB}$

Risoluzione

Il problema può essere risolto in due differenti modi, trattiamoli entrambi.

Primo metodo



Il primo metodo risolutivo consiste nel porre il segmento $\overline{AC} = x$ e il segmento $\overline{CB} = y$.
E' necessario porre delle condizioni sulle incognite: i segmenti $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ essendo corde possono avere lunghezza massima $2r$ quindi $0 \le x \le 2r$ e $0 \le y \le 2r$.
Avendo scelto di risolvere il problema utilizzando due incognite è necessario trovare due equazioni che mettano in relazione x e y.
La prima equazione è già fornita dal testo, essa in termini di x e y diventa:

$$\sqrt{6}x + \sqrt{2}y = 4r$$

La seconda equazione si può ricavare ricordando che ogni triangolo inscritto in una semicirconferenza è retto. Applicando quindi il teorema di Pitagora si ottiene:

$$x^2 + y^2 = 4r^2$$

Ora basta risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{6}x + \sqrt{2}y = 4r \\ x^2 + y^2 = 4r^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}r - \sqrt{3}y \\ x^2 + y^2 = 4r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{2}r - \sqrt{3}y \\ 4y^2 - 4\sqrt{6}ry + 4r^2 = 0 \end{cases}$$

da cui si trova: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(\sqrt{6}r - \sqrt{2}r) \\ \\ y = \dfrac{1}{2}(\sqrt{6}r + \sqrt{2}r) \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(\sqrt{6}r + \sqrt{2}r) \\ \\ y = \dfrac{1}{2}(\sqrt{2}r - \sqrt{6}r) \end{cases}$

Nella seconda soluzione $y < 0$ quindi è accettabile solamente la prima soluzione.
Applicando ora il primo teorema di Euclide è possibile trovare il segmento $\overline{AP}$:

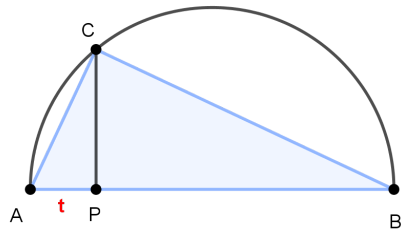
$$x^2 = \overline{AP}(2r - \overline{AP})$$

da cui:

$$\overline{AP} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}.$$

Secondo metodo

Il secondo metodo risolutive consiste invece nel porre il segmento $\overline{AP} = t$.
Anche per esso è necessario porre una limitazione: $0 \leq t \leq 2r$.
Poiché il testo ci fornisce la relazione $\sqrt{6} \cdot \overline{BC} + \sqrt{2} \cdot \overline{AC} = 2 \cdot \overline{AB}$ è necessario trovare $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ in funzione di t.
Applicando il primo teorema di Euclide si ottiene:
$\overline{AC}^2 = 2rx$ e $\overline{CB}^2 = (2r - x)2r$. Sostituendo essi nella relazione iniziale si ottiene:



$$\sqrt{3t(2r-t)} = t - r.$$

Ponendo $t - r \geq 0$ cioè $t \geq r$, elevando al quadrato entrambi i membri e risolvendo rispetto a t si ottiene:

$$t = \frac{2+\sqrt{3}}{2}.$$

Quindi

$$\overline{AP} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}.$$