Dimostrazione

Luca Cantoni

3 gennaio 2018

Esercizio 63 Su uno dei due lati di un angolo dato di vertice O segna due punti A e C; sul secondo lato riporta il segmento OB congruente a OA e il segmento OD congruente a OC. Congiungi A con D e B con C e sia E il punto di intersezione dei due segmenti AD e BC. Dimostra che

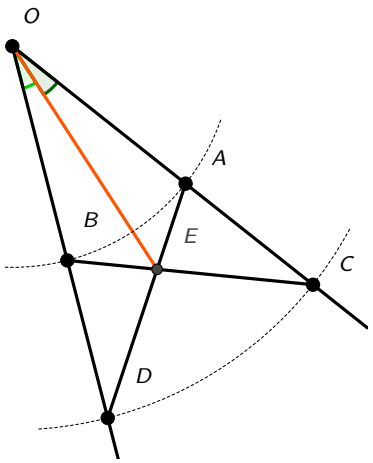
1. i triangoli OAD e OBC sono congruenti;
2. $AD \cong BC$ e $C\widehat{A}E \cong E\widehat{B}D$;
3. $EA \cong EB$, $CE \cong ED$;
4. la congiungente O con E è la bisettrice dell'angolo dato $A\widehat{O}B$.

Ipotesi

1. $OA \cong OB$;
2. $OC \cong OD$;
3. $\{E\} = AD \cap BC$.

Tesi

1. $OAD \cong OBC$;
2. $AD \cong BC$ e $C\widehat{A}E \cong E\widehat{B}D$;
3. $EA \cong EB$, $CE \cong ED$;
4. $E\widehat{O}C \cong D\widehat{O}E$.



Dimostrazione. Suddividiamo la dimostrazione in quattro parti, corrispondenti alle quattro tesi da dimostrare.

1. Dimostriamo la tesi 1. La dimostrazione della prima tesi discende immediatamente dalle ipotesi. Si noti infatti che i due triangoli hanno in comune l'angolo di origine O, poi $OA \cong OB$ e $OD \cong OC$: i due triangoli OAD e OBC sono dunque congruenti per il postulato o primo criterio di congruenza dei triangoli, avendo un angolo e i due lati ad esso adiacenti rispettivamente congruenti.

2. Passiamo alla tesi 2. Avendo provato che $OAD \cong OBC$, si ha che triangoli congruenti hanno lati corrispondenti congruenti: essendo per ipotesi $OA \cong OB$ e $OD \cong OC$, di conseguenza AD e il suo corrispondente BC devono essere congruenti.

   Si noti ora che $O\widehat{A}E + E\widehat{A}C \cong \pi$, poiché per costruzione O, A, C sono allineati; analogamente anche $O\widehat{B}E$ e $E\widehat{B}D$ sono supplementari, ovvero $O\widehat{B}E + E\widehat{B}D \cong \pi$. Ancora, essendo $OAD \cong OBC$, di conseguenza si ha che in triangoli congruenti, gli angoli corrispondenti sono congruenti e dunque $O\widehat{A}D \cong O\widehat{B}C$. Osserviamo che la differenza tra angoli congruenti dà origine ad angoli congruenti:

$$E\widehat{A}C \underbrace{\cong}_{\text{per costr.}} \pi - O\widehat{A}E \underbrace{\cong}_{O\widehat{A}D \cong O\widehat{B}C} \pi - O\widehat{B}E \underbrace{\cong}_{\text{per costr.}} E\widehat{B}D.$$

   Per la proprietà transitiva della congruenza si ha $E\widehat{A}C \cong E\widehat{B}D$.

3. Proviamo la tesi 3. Osserviamo che $A\widehat{E}C \cong B\widehat{E}D$, perché sono angoli opposti al vertice; inoltre la differenza tra segmenti congruenti dà origine a segmenti congruenti e dunque $AC \cong BD$; infine, abbiamo dimostrato sopra che $E\widehat{A}C \cong E\widehat{B}D$: dal secondo criterio di congruenza dei triangoli generale segue dunque che $EAC \cong EBD$ e di conseguenza la tesi 3.

4. Dimostriamo infine la tesi 4. Tracciamo il segmento OE. Si noti che i triangoli OEC e OED hanno: $OC \cong OD$ per ipotesi; $CE \cong DE$ (tesi 3); il lato OE in comune. Per il terzo criterio di congruenza dei triangoli $OEC \cong OED$, e da tale congruenza segue che $E\widehat{O}C \cong D\widehat{O}E$, dunque OE è bisettrice di $A\widehat{O}B$.

□

Progetto e schema della dimostrazione

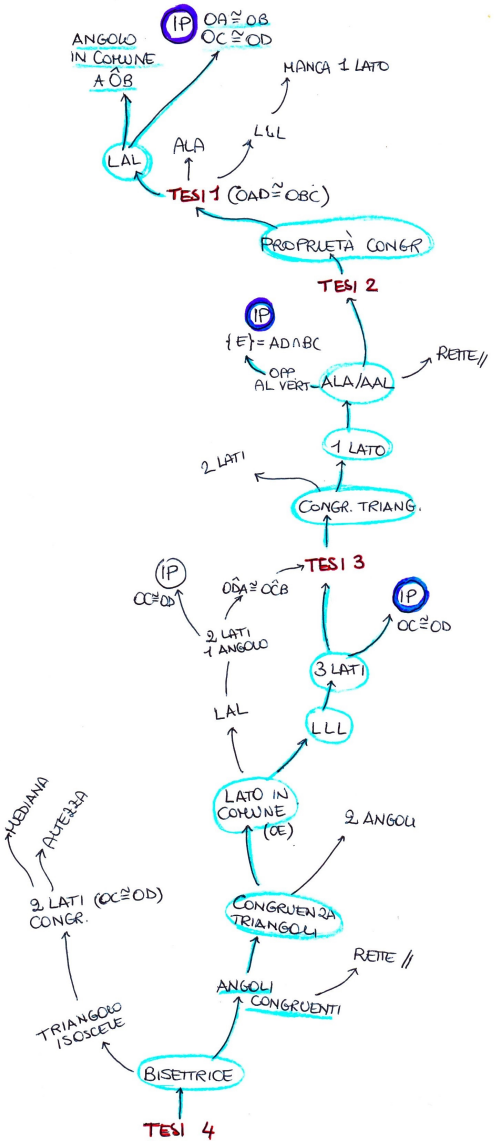


Figura 1: Progetto della dimostrazione

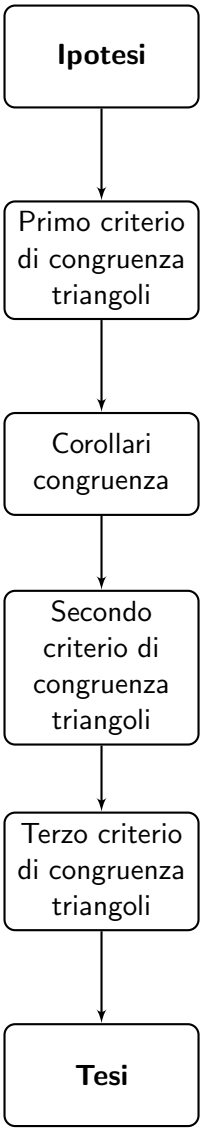


Figura 2: Schema della dimostrazione