Scomposizione in fattori di un polinomio

Alessia Alinovi

22 novembre 2017

Definizione 1. Un polinomio è **riducibile** quando può essere scomposto in fattori, ciascuno dei quali di grado inferiore a quello del polinomio dato.

Vi sono alcuni metodi normalmente impiegati per scomporre un polinomio in fattori, vediamoli più nel dettaglio:

Raccoglimento a fattor comune totale

Questo metodo si applica quando tutti i termini del polinomio hanno in comune un fattore, come in questo caso:

$$AB + AC + AD$$

Per scomporre polinomi di questo tipo si procede in questo modo:

1. determinare il MCD dei termini del polinomio dato;
2. calcolare i quozienti tra i termini del polinomio e il MCD;
3. scrivere il polinomio dato come prodotto tra il MCD e il polinomio che ha come termini i quozienti ottenuti.

$$AB + AC + AD = A(B + C + D)$$

Esempio 1. Consideriamo il polinomio:

$$4x^2y + 8xy^2 + 2x^4z^4$$

troviamo il MCD tra $4x^2y$, $8xy^2$ e $2x^4z^4$

$$MCD(4x^2y; 8xy^2; 2x^4z^4) = 2x$$

alla fine avremo :

$$4x^2y + 8xy^2 + 2x^4z^4 = 2x(2xy + 4x^2 + x^3z^4)$$

Raccoglimento a fattor comune parziale

Questo metodo si applica quando non è possibile utilizzare il precedente ma vi sono termini comuni ad alcuni fattori.
E' essenziale però che dopo il raccoglimento parziale si possa eseguire un raccoglimento totale, altrimenti non sarà possibile scomporre il polinomio in fattori.

Consideriamo il polinomio

$$ax + bx + ay + by$$

osserviamo che il fattore x è comune al primo e al secondo termine, così come y è comune al terzo e quarto termine.
Raccogliamo x tra i primi due termini e y tra il terzo e il quarto con lo stesso procedimento visto

per il raccoglimento totale.

$$x(a+b)+y(a+b)$$

ora eseguiamo il raccoglimento totale tra i due fattori e avremo:

$$(a+b)(x+y)$$

Esempio 2. Consideriamo il polinomio:

$$5ax+5bx+ay+by$$

possiamo osservare che il fattore a è comune al primo e al terzo fattore mentre il termine b al secondo e al quarto.
Effettuiamo il raccoglimento parziale:

$$a(5x+y)+b(5x+y)$$

e poi il raccoglimento totale:

$$(5x+y)(a+b).$$

Osserviamo che era possibile procedere in un altro modo, infatti i primi due termini hanno in comune il fattore $5x$ mentre il terzo e il quarto il fattore y.

$$5x(a+b)+y(a+b)$$

$$(a+b)(5x+y)$$

Scomposizione mediante i prodotti notevoli

Questo metodo viene utilizzato quando ci troviamo davanti allo sviluppo di un prodotto notevole. L'unico modo per utilizzare questo metodo è conoscere i prodotti notevoli e saper riconoscere il loro sviluppo.

Scomposizione della differenza di due quadrati	$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
Trinomio scomponibile nel quadrato di un binomio	$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
Polinomio scomponibile nel quadrato di un trinomio	$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2$
Quadrinomio scomponibile nel cubo di un binomio	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

Esempio 3.

$$x^2-4y^2=(x+2y)(x-2y)$$

Esempio 4.

$$a^2+6a+9=(a+3)^2$$

Esempio 5.

$$a^2+b^2+4c^2+2ab+4ac+4bc=(a+b+2c)^2$$

Esempio 6.

$$x^3+6x^2+12^x+8=(x+2)^3$$

Scomposizione tramite somma o differenza di due cubi

Anche in questo caso l'unico modo per scomporre la somma o la differenza di due cubi è ricordare lo sviluppo.

Scomposizione dellla somma di due cubi	$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
Scompoizione della differenza di due cubi	$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Esempio 7. Consideriamo la somma:

$$8a^3+27b^3$$

notiamo che $8a^3$ è il cubo di $2a$ mentre che $27b^3$ è il cubo di $3b$.
Utilizzando la scomposizione sopra riportata:

$$8a^3+27b^3=(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2).$$

Esempio 8. Ora consideriamo la differenza:

$$a^3-8$$

notiamo che a^3 è il cubo di a e 8 è il cubo di 2.
Utilizzando la scomposizione sopra riportata:

$$a^3-8=(a-2)(a^2+2a+4).$$

Scomposizione del trinomio notevole

Si definisce trinomio **notevole** un polinomio della forma

$$x^2+Sx+P$$

Dove S è la somma di due numeri e P è il prodotto tra gli stessi due numeri. Consideriamo lo stesso polinomio esplicitando la somma e il prodotto:

$$x^2+(A+B)x+A\cdot B$$

sviluppando i calcoli avremo

$$x^2+(A+B)x+A\cdot B=x^2+Ax+Bx+AB$$

raccogliamo x tra i primi due fattori e b tra il terzo e il quarto applicando poi un raccoglimento totale

$$x^2+(A+B)x+A\cdot B=x^2+Ax+Bx+AB=(x+A)(x+B)$$

Quindi la scomposizione è $(x+A)(x+B)$.

Per scomporre il trinomio notevole x^2+Sx+P in fattori basterà fare qualche tentativo per trovare due numeri la cui somma è uguale a S e il prodotto uguale a P.

Esempio 9. Consideriamo il trinomio:

$$x^2-4x-12$$

è necessario trovare due numeri la cui somma $S=-4$ e il prodotto $P=-12$.
Questi due numeri sono $A=2$ e $B=-6$ e applicando la formula sopra riportata avremo:

$$x^2-4x-12=(x-6)(x+2)$$

Scomposizione mediante il teorema di Ruffini

Non sempre è possibile scomporre un polinomio $P(x)$ con i metodi precedenti. In questo caso è necessario utilizzare quest'ultimo metodo.

1. Cercare una radice c di $P(x)$;
2. se c è una radice di $P(x)$ per il teorema di Ruffini il polinomio $P(x)$ è divisibile per $(x-c)$, determinare il rapporto $Q(x)$ tra $P(x)$ e $(x-c)$ utilizzando la regola di Ruffini;
3. $P(x) = Q(x) \cdot (x-c)$;
4. nel caso $Q(x)$ sia anch'esso scomponibile in fattori scomporlo utilizzando, se necessario, ancora il teorema di Ruffini.

Esempio 10. Consideriamo il polinomio:

$$P(x) = x^3 - 3x - 2$$

cercando una radice di $P(x)$ troviamo che $P(-1) = 0$ perciò il polinomio è divisibile per $(x+1)$. Troviamo $Q(x)$ utilizzando la regola di Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & -3 & -2 \\ -1 & & -1 & +1 & +2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

$Q(x) = x^2 - x - 2$
quindi risulta:

$$P(x) = (x^2 - x - 2)(x+1)$$

$x^2 - x - 2$ è un trinomio notevole con $S = -1$ e $P = -2$.
Il polinomio di partenza scomposto in fattori risulta essere:

$$(x+1)(x+1)(x-2) = (x+1)^2(x-2).$$

Strategie risolutive

Riportiamo di seguito alcune domande da porsi durante la scomposizione in fattori di un polinomio. È necessario porsi queste domande in fila una dopo l'altra.

1. **Vi è un fattore comune a tutti i termini del polinomio?**
   Se la risposta è affermativa utilizzare il metodo del raccoglimento a fattor comune totale.
2. **Vi sono fattori comuni ad alcuni termini del polinomio?**
   Se la risposta è affermativa utilizzare il metodo del raccoglimento a fattor comune parziale.

   N.B. È utile utilizzare quest'ultimo metodo quando, una volta effettuato il raccoglimento parziale, è possibile effettuare un raccoglimento a fattor comune totale.
3. **Il polinomio che mi trovo davanti è lo sviluppo di un qualche prodotto notevole?**
   Se è così, riconoscere lo sviluppo e scomporlo mediante il corrispondente prodotto notevole.
4. **Il polinomio ha un termine di secondo grado, uno di primo grado e uno di grado zero?**
   Riconoscere se è un trinomio particolare ed effettuare la scomposizione.
5. Se non è possibile scomporre il polinomio con nessuno dei metodi precedenti ricorrere al teorema di Ruffini.