Risoluzione di equazioni di secondo grado

Luca Cantoni

15 novembre 2017

1 La forma di un'equazione di secondo grado

Un'equazione di secondo grado generica è della forma

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

dove a, b, c sono i coefficienti dei termini di un polinomio di grado 2.

Se $a = 0$, la 1 verrebbe ricondotta a un'equazione lineare (cioè di primo grado, e non più di secondo!) del tipo

$$bx = -c \iff x = -\frac{c}{b} \text{ se } b \neq 0.$$

Quindi per generalizzare il metodo risolutivo, ha senso considerare $a \neq 0$.

2 Protocollo di risoluzione

Sia

$$ax^2 + bx + c = 0$$

l'equazione da risolvere, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

1. Se i coefficienti del polinomio a, b, c non sono interi, si applichino i principî di equivalenza delle equazioni per ottenerli interi.
2. Si osservi il segno di c.
3. Sia $c = 0$.
   (a) Se $c = 0$, si ottiene $ax^2 + bx = 0$; quindi scomporre il polinomio a sinistra ottenendo $x(ax + b) = 0$.
   (b) L'equazione è soddisfatta per $x \in \left\{ 0, -\frac{b}{a} \right\}$.

4. Se $c \neq 0$, allora si calcoli il discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac, \tag{2}$$

o **equivalentemente** (conviene solo se b pari: si può dimostrare*)

$$\frac{\Delta}{4} = \frac{b^2}{4} - ac, \quad b \in \mathbb{P} = \{\, 2n \mid n \in \mathbb{N} \,\}. \tag{3}$$

(a) $\Delta < 0$: $\nexists x \in \mathbb{R}$ che possa risolvere l'equazione.

(b) $\Delta = 0$: la soluzione è $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$.
Si noti che il polinomio è un quadrato perfetto e l'equazione può essere ricondotta alla forma

$$a(x - x_0)^2 = 0$$

tramite il *metodo del completamento del quadrato*; ovviamente, ciò non cambia la soluzione che rimane $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

(c) $\Delta > 0$: se $a = \pm 1$ si può provare a scomporre il polinomio come *trinomio notevole*; in tutti i casi le soluzioni si posso calcolare nel seguente modo:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \tag{4}$$

o equivalentemente, calcolando $\Delta/4$ con 3**, si ottiene

$$x_{1,2} = \frac{-b/2 \pm \sqrt{\Delta/4}}{a}, \quad b \in \mathbb{P}. \tag{5}$$

In questo caso riscrivendo la 1 con la scomposizione del polinomio a sinistra si ha:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

*Le soluzioni calcolate con 4 o 5 sono ovviamente uguali. Per dimostrarlo basta osservare che se b è **pari**, allora è divisibile per 2, dunque si può scrivere $b = 2n_0$, con $n_0 \in \mathbb{N}$. Calcolando Δ con 2 si ottiene:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2n_0)^2 - 4ac = 4n_0^2 - 4ac = 4(n_0^2 - ac) = 4(b^2/4 - ac) = 4(\Delta/4).$$

È chiaro che si può sempre raccogliere 4 fuori di radice: la breve successione di uguaglianze vuole dimostrare che conviene solo se b è pari, dato che il radicando rimane intero; in caso contrario, si avrebbe un radicando razionale, inutilmente scomodo da maneggiare.

**Ora calcolando $x_{1,2}$ con 4, considerando che $\Delta = 4(\Delta/4)$ si ottiene:

$$x_{1,2} = \frac{-b^2 \pm \sqrt{4(\Delta/4)}}{2a} = \frac{-b^2 \pm 2\sqrt{\Delta/4}}{2a} = 2\frac{-b^2/2 \pm \sqrt{\Delta/4}}{2a} = \frac{-b^2/2 \pm \sqrt{\Delta/4}}{a}.$$

3 Esempi

Esempio 3.1. Si indichino quali $x \in \mathbb{R}$ soddisfano all'equazione

$$-x^2 + \frac{5}{3}x + 2 = 0.$$

1. Si moltiplichino entrambi i membri per 3, ottenendo:

$$-3x^2 + 5x + 6 = 0.$$

2. Si individuino i coefficienti: $a = -3$, $b = 5$, $c = 6$.

3. Dato che $c \neq 0$ e $b \notin \mathbb{P}$, si calcoli il discriminante con la 2:

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 6 = 97 > 0.$$

4. Essendo $\Delta > 0$, si proceda con il calcolo delle due soluzioni distinte con la 4:

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{97}}{2 \cdot (-3)} = \frac{5}{6} - \frac{\sqrt{97}}{6}, \qquad x_2 = \frac{-5 - \sqrt{97}}{2 \cdot (-3)} = \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{97}}{6}.$$

5. Scrittura delle soluzioni come insieme (oppure come al passo):

$$-x^2 + \frac{5}{3}x + 2 = 0 \iff x \in \left\{ \frac{5}{6} - \frac{\sqrt{97}}{6}, \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{97}}{6} \right\}.$$

Esempio 3.2. Si indichino quali $x \in \mathbb{R}$ soddisfano all'equazione

$$x^2 + 2x + 3 = 0.$$

1. I coefficienti del polinomio sono tutti interi e $c \neq 0$, dunque: $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.

2. Essendo $b = 2 \in \mathbb{P}$, si calcoli il discriminante con la 3:

$$\Delta/4 = (2/2)^2 - 1 \cdot 3 = -2 < 0.$$

3. Scrittura della soluzione: siccome $\Delta/4$ (ha lo stesso segno di Δ) < 0, allora

$$\nexists x \in \mathbb{R} \text{ tale che } x^2 + 2x + 3 = 0.$$