Punti di discontinuità

Luca Cantoni

febbraio 2017

1 Dalla continuità alla discontinuità

Perché si possano rintracciare i punti di discontinuità di una funzione occorre, anzitutto, saper riconoscere quando una funzione è **continua**.

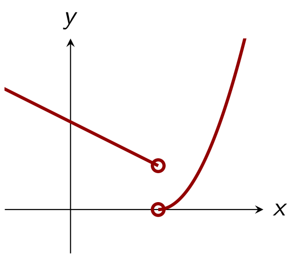
> **Funzione continua in un punto**
> Se per una funzione f in un punto x_0
>
> I. $\exists\, y = f(x_0)$
>
> II. $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = l,\, l \in \mathbb{R}$
>
> III. $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
>
> allora f è continua in x_0.

Di conseguenza, se almeno una delle condizioni non è rispettata, la funzione si dirà **discontinua** in x_0.

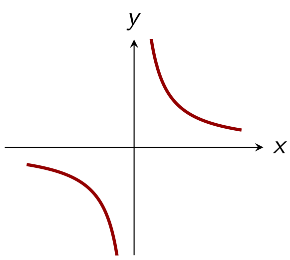
2 Tre specie di discontinuità

Punto di discontinuità di prima specie Un punto x_0 si dice punto di discontinuità di prima specie per la funzione $f(x)$ quando, per $x \to x_0$, il limite destro e il limite sinistro della funzione sono entrambi finiti ma diversi fra loro,

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

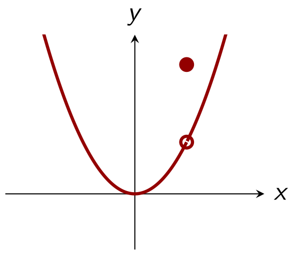


Punto di discontinuità di seconda specie Un punto x_0 si dice punto di discontinuità di seconda specie per la funzione $f(x)$ quando, per $x \to x_0$, almeno uno dei due limiti destro o sinistro è infinito oppure non esiste.



Punto di discontinuità di terza specie (eliminabile) Un punto x_0 si dice punto di discontinuità di terza specie per la funzione $f(x)$ quando

1. $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = l, l \in \mathbb{R}$;
2. $x_0 \notin D_f$ oppure $x_0 \in D_f \ \wedge \ f(x_0) \neq l$.



Specie	Proprietà	Condizioni disattese
Prima	$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$	II e III
Seconda	Almeno un limite (destro o sinistro) inesistente o infinito	II
Terza	$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = l, l \in \mathbb{R}$; $x_0 \notin D_f$ oppure $x_0 \in D_f \ \wedge \ f(x_0) \neq l$.	I oppure III

3 Individuare i punti di discontinuità

3.1 Dove rintracciarli

Data una funzione $f(x)$, si possono rintracciare gli eventuali punti di discontinuità:

1. agli **estremi del dominio**[1] di una funzione (sarà dunque utile scrivere il D_f come unione di intervalli);
2. agli **estremi di ciascun intervallo** in cui è definita una funzione a tratti.

3.2 Come rintracciarli

Per dimostrare che un punto x_0 è un punto discontinuità occorre:

1. calcolare $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$;
2. si distinguono tre casi:
   (a) se almeno uno dei due limiti risulta infinito o non esiste, si ha un punto di discontinuità di seconda specie (se almeno uno dei due risulta ∞, si tratta di un asintoto verticale);
   (b) se i due limiti sono finiti e hanno valori diversi, si ha un punto di discontinuità di prima specie;
   (c) se i due limiti hanno lo stesso valore, ma $x_0 \notin D_f$ o $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, si ha un punto di discontinuità di terza specie.

[1] Per 'estremi del dominio' si intendono gli estremi di ciascun intervallo in cui il dominio di una funzione può essere riscritto. Si noti che un ipotetico dominio $D = \mathbb{R}$ è equivalente a $D = (-\infty; +\infty)$; ancora, se $D = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$, esso è equivalente a $D = (-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup (2; +\infty)$ e in tal caso occorrerà cercare gli eventuali punti di discontinuità calcolando il limite della funzione per $x \to -1^-$, $x \to -1^+$, $x \to 2^-$ e $x \to 2^+$.

4 Esempi di funzioni discontinue e grafici notevoli

4.1 Discontinuità di prima specie

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{|x|}$$

$$g(x) = \left\lfloor \frac{3}{4}x - 1 \right\rfloor \text{ (funzione parte intera}^2\text{)}$$

$$h(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$i(x) = \frac{|x|}{x}e^x$$

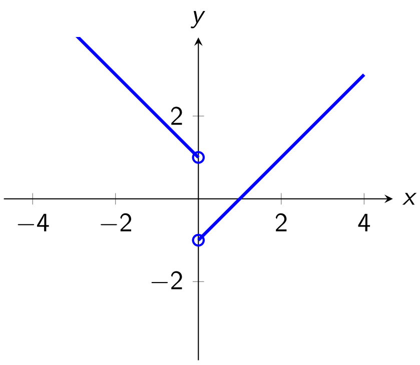


Figura 1: Grafico di $f(x)$

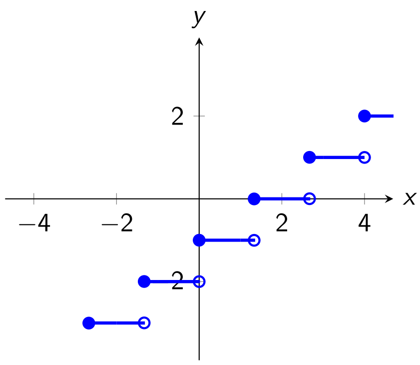


Figura 2: Grafico di $g(x)$

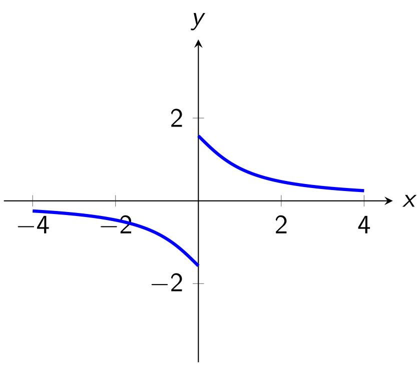


Figura 3: Grafico di $h(x)$

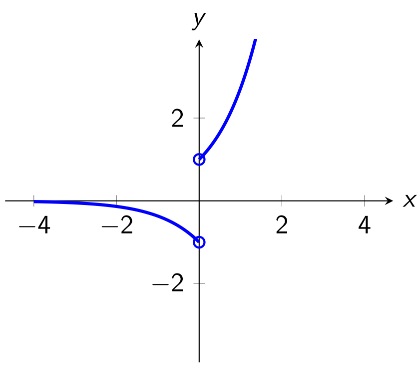


Figura 4: Grafico di $i(x)$

[2] La funzione parte intera di x, o *floor*, associa a ciascun numero reale il più grande intero che lo precede. In simboli: $\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x, \forall x \in \mathbb{R}\}$. Per esempio: $\lfloor 1 \rfloor = 1$, $\lfloor 4.7 \rfloor = 4$, $\lfloor -2.3 \rfloor = -3$.

4.2 Discontinuità di seconda specie

$$p(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$q(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

$$r(x) = \log x$$

4.3 Discontinuità di terza specie

$$s(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^3 + 2x^2 + 4x + 8}$$

Nota I grafici delle funzioni dei parr. 4.2 e 4.3 vengono omessi perché sono più facilmente deducibili (o già noti) rispetto agli altri.

4.4 Tutte le discontinuità

$$t(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{x(x-2)}{(x+1)(x-2)}}}$$

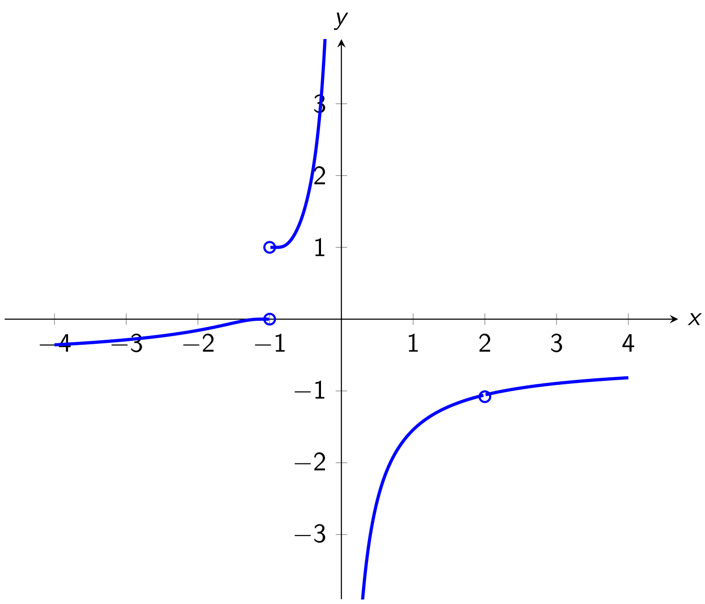


Figura 5: Grafico di $t(x)$