Scheda tattica sulle trasformazioni elementari

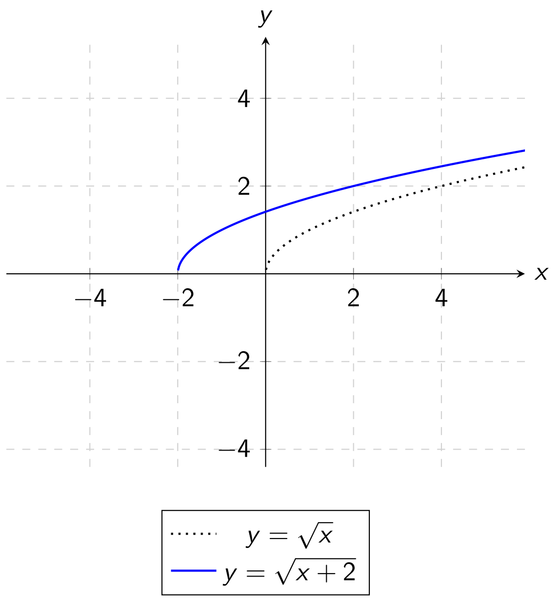
Asja Scalera

gennaio 2017

1 Traslazione

Per traslare una funzione necessitiamo di un vettore $\vec{v}$ che indichi lo spostamento di ogni punto,

$$\vec{v}(a; b).$$



1.1 Calcolo algebrico

Il sistema generale è

$$\tau_{\vec{v}} : \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b, \end{cases}$$

ma nell'espressione i valori che dobbiamo sostituire sono x e y, quindi

$$\tau_{\vec{v}} : \begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b. \end{cases}$$

Sostituiamo le variabili nell'espressione algebrica $y = f(x)$ che diventa

$$y = f(x - a) + b.$$

1.2 Esempio

$$y = \frac{1}{4}(x+2)(x-3)(x-1)$$

1. Prendiamo un vettore $\vec{v}(2; -1)$ in maniera ipotetica e scriviamo l'equazione della trasformazione:

$$\tau_{\vec{v}} : \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases} \Rightarrow \tau_{\vec{v}} : \begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' + 1. \end{cases}$$

2. Sostituiamo nell'espressione analitica della funzione:

$$y' + 1 = \frac{1}{4}(x' - 2 + 2)(x' - 2 - 3)\cdot$$
$$\cdot (x' - 2 - 1)$$

$$y = \frac{1}{4}x(x-5)(x-3) - 1.$$

1.3 Esercizi

1.3.1 Esercizio

Data l'equazione $y = \sqrt{x+2}$, partendo dalla funzione elementare $y = \sqrt{x}$, disegna il grafico.

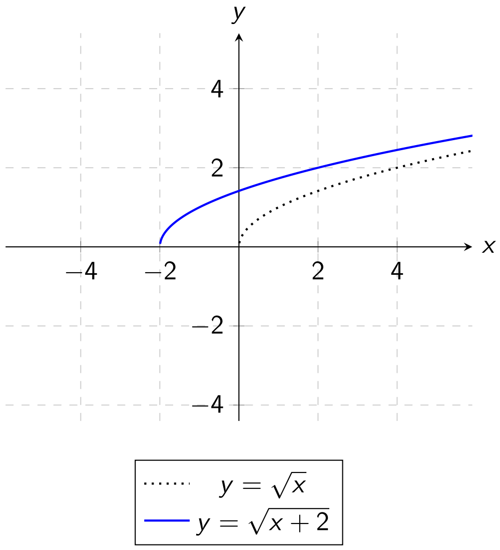
1. Per trovare il grafico della funzione traslata dobbiamo primariamente calcolarne algebricamente il vettore.

2. Ricaviamo l'equazione della traslazione dal sistema, notando che y rimane invariato al contrario di x:

$$\tau_{\vec{v}} : \begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y'. \end{cases}$$

3. Ricaviamo il vettore $\vec{v}$:

$$\tau_{\vec{v}} : \begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y \end{cases} \quad \Rightarrow \vec{v}(-2; 0).$$



1.3.2 Esercizio

Data la funzione $f(x) = \sqrt{x} + 5$, partendo dalla funzione elementare $y = \sqrt{x}$, disegna il grafico.

1. Notiamo meglio la variazione della y se, applicando il primo principio di equivalenza, riscriviamo:

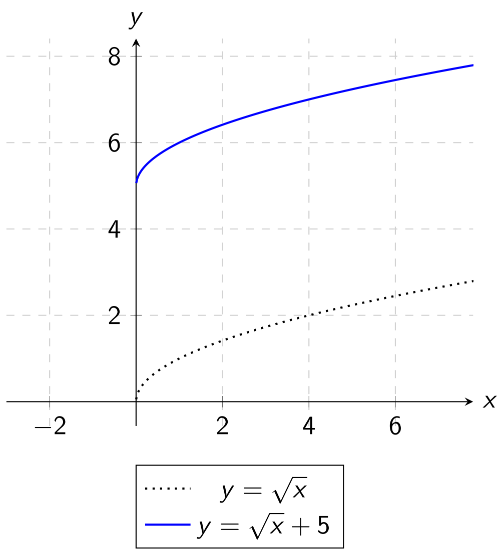
$$y - 5 = \sqrt{x}.$$

2. Varia la y, ma non la x:

$$\tau_{\vec{v}} : \begin{cases} x = x' \\ y = y' - 5. \end{cases}$$

3. Ricaviamo il vettore $\vec{v}$:

$$\tau_{\vec{v}} : \begin{cases} x' = x \\ y' = y + 5 \end{cases} \quad \Rightarrow \vec{v}(0; 5).$$



1.3.3 Esercizio

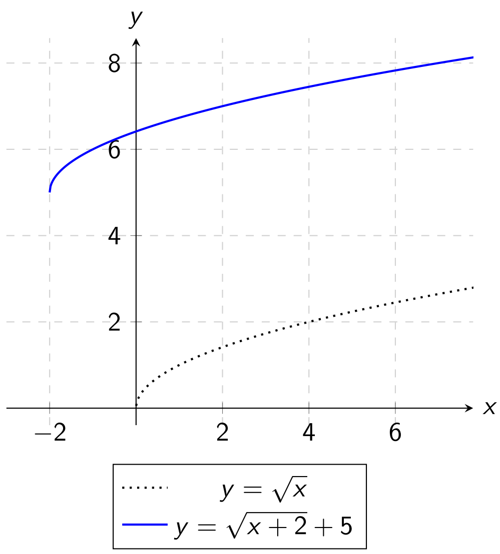
Data la funzione $f(x) = \sqrt{x+2} + 5$, partendo dalla funzione elementare $y = \sqrt{x}$, disegna il grafico.

1. Cambiano entrambe le variabili:

$$\tau_{\vec{v}} : \begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' - 5. \end{cases}$$

2. Ricaviamo il vettore $\vec{v}$:

$$\tau_{\vec{v}} : \begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 5 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}(-2; 5).$$



2 Simmetria

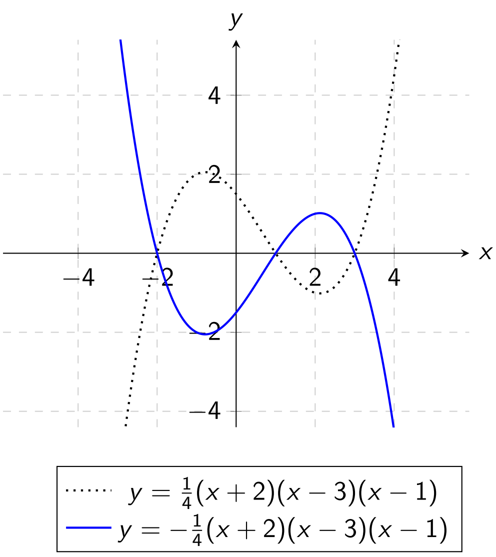
Esistono diversi tipi di simmetria: assiale, rispetto all'asse-y e all'asse-x, rispetto ad una retta parallela agli assi; simmetria centrale.

2.1 Simmetria assiale rispetto all'asse-x

2.1.1 Calcolo algebrico

Le ascisse rimangono invariate mentre le ordinate variano, diventando l'opposto.

$$\sigma_x : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$



2.1.2 Esempio

$$y = \frac{1}{4}(x+2)(x-3)(x-1)$$

1. Applichiamo la trasformazione σ_x,

$$\sigma_x : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y. \end{cases}$$

2. L'espressione analitica della funzione diventa:

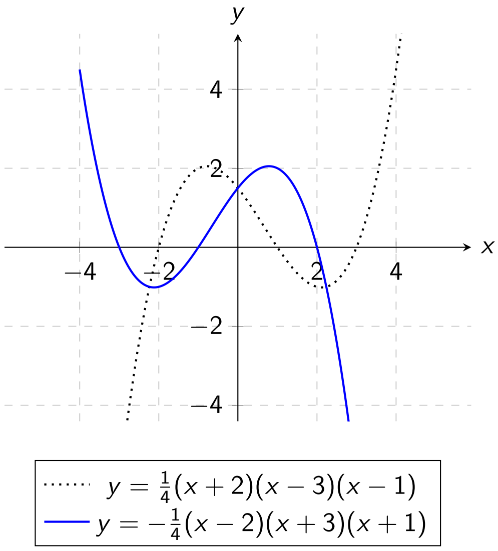
$$-y = \frac{1}{4}(x+2)(x-3)(x-1)$$
$$y = -\frac{1}{4}(x+2)(x-3)(x-1).$$

2.2 Simmetria assiale rispetto all'asse-y

2.2.1 Calcolo algebrico

Variano le ascisse e le ordinate restano uguali,

$$\sigma_y : \begin{cases} x' = -x \\ y' = y. \end{cases}$$



2.2.2 Esempio

$$y = \frac{1}{4}(x+2)(x-3)(x-1)$$

1. Applichiamo la trasformazione σ_y,

$$\sigma_y : \begin{cases} x' = -x \\ y' = y. \end{cases}$$

2. L'espressione analitica della funzione diventa:

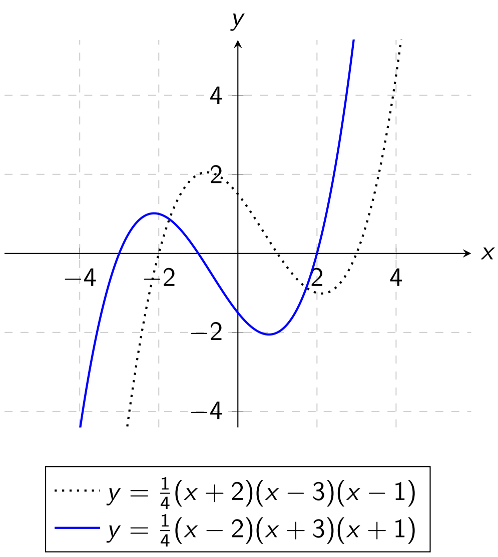
$$y = \frac{1}{4}(-x+2)(-x-3)(-x-1)$$
$$y = -\frac{1}{4}(x-2)(x+3)(x+1).$$

2.3 Simmetria centrale

2.3.1 Calcolo algebrico

Entrambe le variabili subiscono una variazione,

$$\sigma : \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y. \end{cases}$$



2.3.2 Esempio

$$y = \frac{1}{4}(x+2)(x-3)(x-1)$$

1. Applichiamo la trasformazione σ,

$$\sigma : \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y. \end{cases}$$

2. L'espressione analitica della funzione diventa:

$$-y = \frac{1}{4}(-x+2)(-x-3)(-x-1)$$
$$-y = -\frac{1}{4}(x-2)(x+3)(x+1)$$
$$y = \frac{1}{4}(x-2)(x+3)(x+1).$$

3 Dilatazione

3.1 Calcolo algebrico

Per eseguire una dilatazione necessitiamo di due valori, chiamati convenzionalmente m e n, i quali agiscono secondo l'equazione della trasformazione che segue:

$$\delta : \begin{cases} x' = mx \\ y' = ny, \end{cases}$$

ma i valori che andremo a sostituire nell'espressione analitica delle funzioni sono x e y, quindi:

$$\delta : \begin{cases} x = \dfrac{x'}{m} \\ y = \dfrac{y'}{n}. \end{cases}$$

Infine, sostituiamo i valori nel modo indicato: la funzione $y = f(x)$ trasformata secondo δ diventa

$$y = nf\left(\frac{x}{m}\right).$$

3.2 Esempio

$$y = \frac{1}{4}(x+2)(x-3)(x-1)$$

1. Prendiamo convenzionalmente $m = \dfrac{1}{2}$ e $n = 4$:

$$\delta : \begin{cases} x' = \dfrac{x}{2} \\ y' = 4y \end{cases} \quad \Rightarrow \delta : \begin{cases} x = 2x' \\ y = \dfrac{y'}{4}. \end{cases}$$

2. Sostituiamo i valori di x e y nell'espressione analitica della funzione:

$$\frac{y'}{4} = \frac{1}{4}(2x'+2)(2x'-3)(2x'-1)$$
$$y' = (2x'+2)(2x'-3)(2x'-1)$$
$$y = (2x+2)(2x-3)(2x-1).$$