# Studio di rette sghembe

V. Alberini, M. Buzzi, L. Cantoni, L. Grignaffini, G. Montis, G. Palù

gennaio 2017

**Problema** Stabilisci se le due rette $r$ e $s$ di equazioni:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -3t \end{cases} \quad \text{e } s: \begin{cases} x - 2 = 0 \\ z - 3 = 0 \end{cases}$$

sono incidenti, parallele o sghembe. Determina la distanza fra esse.

# 1 Metodo della matrice

## 1.1 Verifica

Un metodo interessante e rapido per verificare che due rette sono sghembe consiste nell'utilizzare una matrice, come mostrato di seguito.

1. Si imposta una matrice come quella indicata di seguito:

$$\begin{bmatrix} x_0' - x_0 & y_0' - y_0 & z_0' - z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{bmatrix}$$

2. Si moltiplicano gli elementi in obliquo da sinistra verso destra e si sommano fra loro:

$$((x_0' - x_0) \cdot m \cdot n') + ((y_0' - y_0) \cdot n \cdot l') + ((z_0' - z_0) \cdot l \cdot m').$$

3. Si moltiplicano ora gli elementi della matrice da destra verso sinistra e si sommano tra loro:

$$((z_0' - z_0) \cdot m \cdot l') + ((y_0' - y_0) \cdot l \cdot n') + ((x_0' - x_0) \cdot n \cdot m').$$

4. Sottraiamo ora la somma dei prodotti del secondo passaggio alla somma dei prodotti del primo:

$$\begin{aligned}&[((x_0' - x_0) \cdot m \cdot n') + ((y_0' - y_0) \cdot n \cdot l') + ((z_0' - z_0) \cdot l \cdot m')] + \\ &\quad - [((z_0' - z_0) \cdot m \cdot l') + ((y_0' - y_0) \cdot l \cdot n') + ((x_0' - x_0) \cdot n \cdot m')].\end{aligned}$$

5. Se il risultato è diverso da 0, allora le rette sono sghembe.

## 1.2 Distanza minima tra due rette sghembe

Per calcolare la distanza minima tra due rette sghembe si può utilizzare uno dei metodi trattati di seguito.

# 2 Metodo algebrico

## 2.1 Verifica

Per verificare che due rette sono sghembe occorre dimostrare che esse non sono incidenti né parallele: perché siano sghembe devono verificarsi *entrambe* le condizioni.

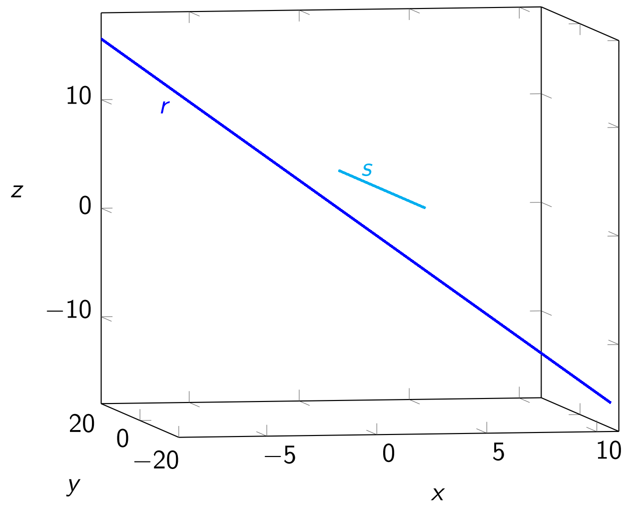


Figura 1: Una rappresentazione bidimensionale di una porzione di spazio euclideo e delle rette $r$ e $s$; immaginate la retta $r$ che taglia trasversalmente la porzione di spazio raffigurata, mentre la retta $s$ parallela all'asse-$y$

1. **Rette in forma parametrica.** Riproponiamo le due rette in forma parametrica.

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -3t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 2 \\ y = \lambda \\ z = 3 \end{cases}$$

2. **Vettori direzionali delle rette.** Per prima cosa è utile esplicitare i vettori direzionali che identificano le due rette: la retta $r$ è identificata dal vettore $\vec{r}(2, -1, -3)$, mentre la retta $s$ è identificata dal vettore $\vec{s}(0, 1, 0)$.

3. **Le rette sono parallele?** Se fossero parallele, dovrebbe essere verificata la condizione di parallelismo, in base alla quale i vettori risultano proporzionali di un fattore $k$ tra loro,

$$\frac{0}{2} = \frac{0}{-3} \neq \frac{1}{-1}.$$

Le rette **non sono parallele**.

4. **Le rette sono incidenti?** Se le rette fossero incidenti, esisterebbe un valore univoco per $\lambda$ e un valore per $t$,

$$\begin{cases} 1+2t=2 \\ 3-t=\lambda \\ -3t=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t=\dfrac{1}{2} \\ 3-t=\lambda \\ t=-1. \end{cases}$$

   Dal momento che $t$ non può assumere contemporaneamente due valori differenti, le due rette **non sono incidenti**.

5. Dato che le rette non sono **né parallele né incidenti**, esse sono **sghembe**.

## 2.2 Distanza minima tra due rette sghembe

1. Il teorema delle rette sghembe afferma che esiste ed è unica la retta perpendicolare comune alle due sghembe. Di conseguenza, per calcolare la distanza minima tra le due rette sghembe, occorre individuare la retta perpendicolare comune ad entrambe, che equivale a identificare il vettore direzionale di tale retta comune.

2. Dal momento che la retta perpendicolare $d$ a entrambe le sghembe intersecherà le due rette in due punti diversi tra loro, le componenti del vettore $\vec{d}$ si calcolano sottraendo tra loro le coordinate di un punto qualunque di $r$ (in funzione del parametro $t$) e quelle di un punto qualunque di $s$ (in funzione del parametro $\lambda$).

3. Le coordinate del vettore $\vec{d}$ sono $d_x = 1+2t-2$, $d_y = 3-t-\lambda$, $d_z = -3t-3$:

$$\vec{d}(1+2t-2, 3-t-\lambda, -3t-3).$$

4. Perché il vettore $\vec{d}$ così definito sia il vettore direzionale della retta perpendicolare a entrambe le rette $r$ e $s$, devono essere verificate le condizioni di ortogonalità con i vettori direzionali $\vec{r}$ e $\vec{s}$:

$$\begin{cases} 2\cdot(1+2t-2)-1\cdot(3-t-\lambda)-3\cdot(-3t-3)=0 \\ 0\cdot(1+2t-2)+(3-t-\lambda)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2+4t-4-3+t+\lambda+9t+9=0 \\ 3-t-\lambda=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 14t+\lambda+4=0 \\ \lambda=3-t. \end{cases}$$

5. Risolvendo si ottiene $\begin{cases} t=-\dfrac{7}{13} \\ \lambda=\dfrac{46}{13}. \end{cases}$

6. Ora utilizzando i valori di $t$ e $\lambda$, siamo in grado di scrivere le coordinate dei punti $R$ e $S$ in cui la retta $d$ interseca rispettivamente le rette $r$ e $s$:

$$R\Big(-\frac{1}{13}, \frac{46}{13}, \frac{21}{13}\Big), \qquad S\Big(2, \frac{46}{13}, 3\Big).$$

7. Calcolando la distanza $\overline{RS}$ si ottiene la distanza minima tra le rette sghembe, ovvero $\overline{RS} = \dfrac{9\sqrt{13}}{13}$.

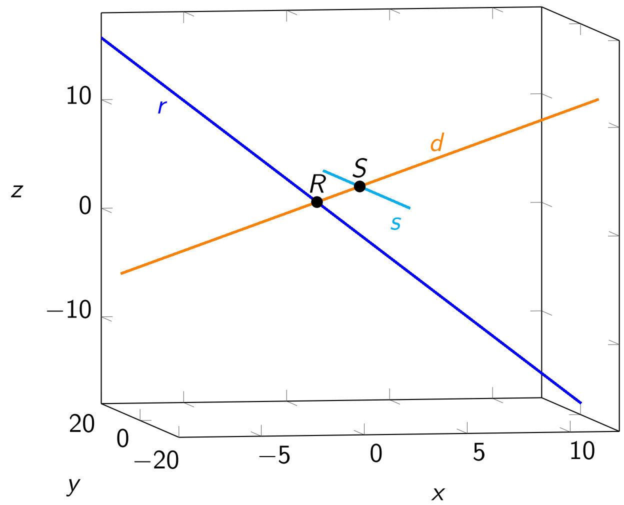


Figura 2: La minima distanza $\overline{RS}$ sulla retta $d$

# 3 Metodo del fascio di rette

## 3.1 Verifica

Per verificare che due rette sono sghembe occorre dimostrare che esse non sono incidenti né parallele: perché siano sghembe devono verificarsi *entrambe* le condizioni.

1. **Vettori direzionali delle rette.** Nel caso della retta $r$ il vettore ha componenti uguali ai coefficienti che moltiplicano il parametro $t$. Per la retta $s$, invece, le componenti sono relativamente facili da trovare, infatti, essendo $x = 2$ e $z = 3$, la retta risulta parallela all'asse $y$, perciò l'unico valore variabile è appunto quello dell'ordinata: $\vec{s}(0, \lambda, 0)$. I vettori risultano perciò

$$\vec{r}(2, -1, -3), \qquad \vec{s}(0, 1, 0).$$

2. **Punto P appartenente alla retta s.** Per determinare le coordinate del punto $P$ basta scegliere un valore arbitrario di $y$, in questo caso $y = 0$:

$$P(2; 0; 3).$$

3. **Piano $\pi$.** Determinare il piano a partire dalle componenti dei vettori $\vec{r}$ e $\vec{s}$ e dalle coordinate del punto $P$:

$$\begin{cases} x = 2\alpha + 2 \\ y = -\alpha + \beta \\ z = -3\alpha + 3. \end{cases}$$

4. **Retta $r$ in forma ridotta.** Riscrivere l'equazione della retta, trovando il valore di $t$ in funzione di una delle variabili $x$, $y$ e $z$, in questo caso $t = 3 - y$:

$$\begin{cases} x = -2y + 7 \\ y = -9 + 3y \end{cases}$$

5. **Intersezione $r$ e $\pi$.** Dall'intersezione tra la retta $r$ e il piano $\pi$ si possono verificare tre casi:

   - impossibile: le rette $r$ e $s$ sono sghembe;
   - indeterminato: le rette $r$ e $s$ coincidono;
   - una soluzione: le rette $r$ e $s$ sono incidenti.

   Svolgendo i calcoli:

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{5}{2} \\ \beta = 4 \end{cases} \quad \rightarrow \mathcal{S} = \varnothing$$

   Le rette $r$ e $s$ risultano perciò **sghembe**.

## 3.2 Distanza minima tra due rette sghembe

1. Come nella risoluzione precedente, per calcolare la distanza minima tra le due rette sghembe, occorre individuare la retta perpendicolare comune ad entrambe, che equivale a identificare il vettore direzionale di tale retta comune.

2. **Creare il fascio di piani passanti per $s$.** Per creare il fascio bisogna moltiplicare dei parametri $\lambda$ e $\mu$ per le due equazioni della retta $s$:

$$\pi\colon\ \lambda(x - 2) + \mu(z - 3) = 0.$$

3. **Ricavare il vettore $\vec{r}$.** Si tratta del vettore di tutti i piani paralleli alla retta $s$ avente come coordinate i coefficienti che moltiplicano i parametri $\lambda$ e $\mu$ per le tre variabili $x$, $y$ e $z$,

$$\vec{r}(\lambda, 0, \mu).$$

4. **Impostare $\pi \perp r$.** Moltiplicare le componenti del vettore $\vec{r}$ del fascio di piani per quelli della retta $r$:

$$2 \cdot \lambda + (-1) \cdot 0 + (-3) \cdot \mu = 0$$
$$\lambda = \frac{3}{2}.$$

5. **Calcolare $\lambda$ e $\mu$.** Scegliere un valore arbitrario di $\lambda$ e con questo calcolare $\mu$:

$$\lambda = 3 \ \wedge \ \mu = 2.$$

6. **Sostituire e trovare l'espressione analitica di $\pi$.**

$$\lambda x + \mu z - 2\lambda - 3\mu = 0$$
$$3x + 2z - 12 = 0.$$

7. **Calcolare distanza $d(P, \pi)$.** Calcolare la distanza tra un punto qualsiasi $P$ appartenente a $r$ e il piano $\pi$:

$$\begin{aligned} d(P, \pi) = \frac{|ax_P + by_P + cz_P + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} &= \frac{|3(1 + 2t) + 0(3 - t) + 2(-3t) - 12|}{\sqrt{9 + 0 + 4}} \\ &= \frac{|3 + 6t - 6t - 12|}{\sqrt{13}} = \frac{9\sqrt{13}}{13}. \end{aligned}$$

# 4 Metodo geometrico

## 4.1 Distanza minima tra due rette sghembe

1. I vettori direzionali $\vec{r}$ e $\vec{s}$ calcolati precedentemente sono:

$$\vec{r}(2, -1, -3), \quad \vec{s}(0, 1, 0).$$

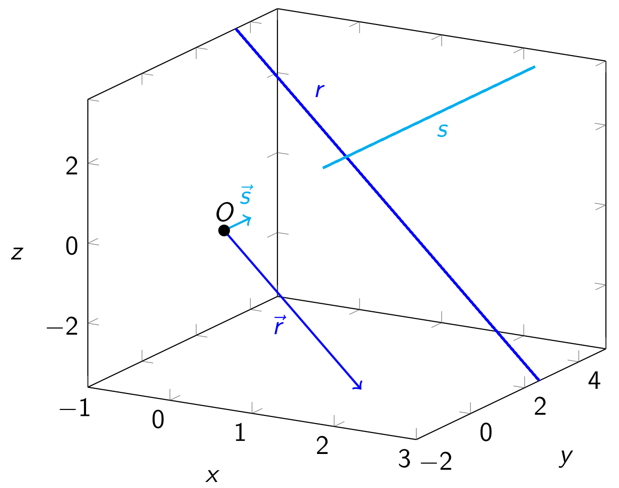


Figura 3: Le rette $r$ e $s$ e i vettori direzionali $\vec{r}$ e $\vec{s}$

2. Trovare i vettori direzionali del piano $\pi$ in funzione di una variabile:

$$\begin{cases} \vec{r} \cdot \vec{\pi} = 0 \\ \vec{s} \cdot \vec{\pi} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2}c \\ b = 0 \\ c = c. \end{cases}$$

3. Trovare il punto $R$ sulla retta $r$: $R(1, 3, 0)$.

4. Piano $\pi$ per $r$:

$$\begin{aligned} &\pi : ax + bx + cz + d = 0 \\ &\frac{3}{2}cx + cz + d = 0 \\ &\frac{3}{2}x + z + \frac{d}{c} = 0. \end{aligned}$$

5. Si impone il passaggio per il punto $R$ per calcolare $\frac{d}{c}$:

$$\frac{3}{2}+\frac{d}{c}=0 \rightarrow \frac{d}{c}=-\frac{3}{2}.$$

6. Trovare l'equazione del piano $\pi$:

$$\pi : \frac{3}{2}x+z-\frac{3}{2}=0.$$

7. Scegliere un punto $S$ sulla retta $s$: $S(2;0;3)$.

8. Trovare, infine, la distanza minima dal piano $\pi$ al punto $S$:

$$d(S,\pi)=\frac{|ax_S+by_S+cz_S+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{\left|3+3-\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{\frac{9}{4}+1}}=\frac{9\sqrt{13}}{13}.$$

## 5 Tabella di riepilogo e confronto

Proponiamo di seguito una tabella riepilogativa dei metodi che si possono utilizzare per calcolare la minima distanza tra due rette sghembe.

| | **Analogie** | **Differenze** |
|---|---|---|
| **Metodo algebrico** | Ricerca del vettore direzionale della retta perpendicolare a $r$ e $s$ | Equazione della retta che interseca le due sghembe |
| **Metodo del fascio di rette** | Ricerca dei vettori direzionali di $r$ e $s$ | Fascio di piani avente come retta base $s$ |
| **Metodo geometrico** | Ricerca dei vettori direzionali di $r$ e $s$ | Calcolo dei coefficienti del piano passante per $r$ e perpendicolare a $s$ |