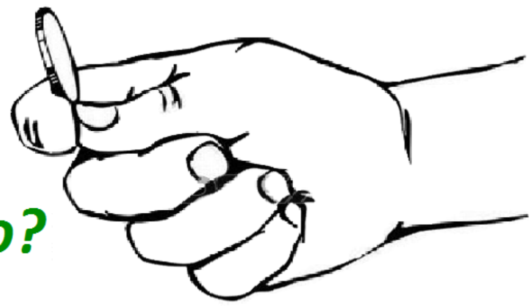
# Testa o croce?

## *E se un giorno atterrasse di taglio?*



A. Alinovi
L. Ferrari
Febbraio 2016

## 1 Quesiti tratti dalla maturità

▷ **Sperim PNI 2001 - Q8**

**Una classe è composta da 12 ragazzi e 4 ragazze. Tra i sedici allievi se ne scelgono 3 a caso: qual è la probabilità che essi siano tutti maschi?**

Casi possibili:

$$C_{16,3} = \frac{16!}{13! \cdot 3!} = 560$$

Casi favorevoli:

$$C_{12,3} = \frac{12!}{9! \cdot 3!} = 220$$

La probabilità che siano tutti maschi sarà:

$$p = \frac{220}{560} = 0.39 \Rightarrow 0.39\%$$

▷ **Sperim PNI 2002 - Q2**

**Il seguente è uno dei celebri problemi del Cavaliere di Méré ($1610-1685$), amico di Blaise Pascal: "giocando a dadi è più probabile ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado, oppure almeno un doppio 1 con 24 lanci di due dadi?"**

1. Consideriamo l'evento $A$ `"ottenere almeno una volta` $1$ `con` $4$ `lanci di un dado"` in questo caso è conveniente considerare l'evento contrario. Avendo $4$ lanci ad ogni lancio la probabilità che non esca $1$ è $\frac{5}{6}$ perciò la probabilità che in $4$ lanci non esca $1$ è $\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.48$. da cui $P(A) = 1 - 48 \approx 0.52$.
2. Consideriamo l'evento $B$ `"ottenere almeno un doppio` $1$ `con` $24$ `lanci di due dadi"`, anche in questo caso consideriamo l'evento contrario. Ad ogni lancio la probabilità che non esca un doppio $1$ è $\frac{35}{36}$ perciò la probabilità che in $24$ lanci non esca $1$ è $\left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0.51$. da cui $P(B) = 1 - 51 \approx 0.49$.

Dunque è più probabile il verificarsi dell'evento $A$.

### ▷ Sperim PNI 2002 - Q3

**Assumendo che i risultati - X, 1, 2 - delle 13 partite del Totocalcio siano equiprobabili, calcolare la probabilità che tutte le partite, eccetto una, terminino in parità.**

La probabilità che una partita finisca in parità vale $\frac{1}{3}$ di conseguenza la probabilità che la partita non finisca in parità è di $\frac{2}{3}$. Le combinazioni che permettono $12$ pareggi sono $13$ poichè può vincere o perdere qualsiasi partita a patto che le altre finiscano in pareggio. Dunque:

$$P = 13 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{12} \cdot \frac{2}{3} = \frac{26}{1594323} \hookrightarrow \left(\frac{26}{3}\right)^{13}$$

### ▷ Sperim PNI 2003 - Q2

**Tre scatole A, B e C contengono lampade prodotte da una certa fabbrica di cui alcune difettose. A contiene 2000 lampade con il 5$\%$ di esse difettose, B ne contiene 500 con il 20$\%$ difettose e C ne contiene 1000 con il 10 $\%$difettose. Si sceglie una scatola a caso e si estrae a caso una lampada. Qual è la probabilità che essa sia difettosa?**

Cosiderando:
- A: estrazione casuale i una lampada nella scatola A;
- B: estrazione casuale i una lampada nella scatola B;

- C: estrazione casuale i una lampada nella scatola C;
- D: estrazione i una lampada difettosa;

Per il teorema delle probabilità totali:

$$P(E) = P(E \mid A) \cdot P(A) + P(E \mid B) \cdot P(B) + P(E \mid C) \cdot P(C)$$
$$\Downarrow$$
$$P(E) = \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{3} \cdot + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{60} = 0.1167$$

▷ **Ordinam 2001 - Q6**

**Dimostrare che si ha: $\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ dove n, k sono numeri naturali qualsiasi, con n $>$ k $>$ 0 .**

Sviluppando il secondo termine e si dimostra che è uguale al primo:

$$\binom{n+1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!}$$

Raccogliendo (n-1)! si ha:

$$= (n-1)! \cdot \frac{1}{k!(n-k-1)!} + \frac{1}{(k-1)!(n-k)!}$$

Essendo n!=n(n-1)! e (n-k)!=(n-k)(n-k-1)! svolgendo i calcoli si ottiene:

$$= \frac{n!}{k!(n-k!)}$$

Che è uguale a $\binom{n}{k}$

▷ **Sperim PNI 2014 -Q3**

**Venti palline sono poste in un'urna. Cinque sono rosse, cinque sono verdi, cinque sono gialle e cinque sono bianche. Dall'urna si estraggono a caso, senza reimbussolamento, tre palline. Si valutino le seguenti probabilità:**
**- esattamente una pallina è rossa;**
**- le tre palline sono di colori differenti.**

1) La pallina rossa può essere estratta alla prima, alla seconda o alla terza estra-

zione quindi moltiplicheremo il caso in cui la pallina viene estratta per prima e dopo altre due palline non rosse per tre:

$$p(E) = \left(\frac{5}{20} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{14}{18}\right) \cdot 3 = \frac{35}{76}$$

2) La probabilità di estrarre tre palline diverse è: $\frac{5}{20} \cdot \frac{5}{19} \cdot \frac{5}{18}$; moltiplicata alle combinazioni dei quattro colori in tre diversi fra loro:

$$\binom{4}{3} 3!$$

Quindi il risultato finale sarà: $p(E) = \left(\frac{5}{20} \cdot \frac{5}{19} \cdot \frac{5}{18}\right) \cdot \binom{4}{3} 3!$

▷ **Sperim PNI 2014 -Q8**

**La "zara" è un gioco d'azzardo di origine araba che conobbe particolare fortuna in Italia in epoca medievale – ne parla anche Dante nella Divina Commedia – e si giocava con tre dadi. Si confronti la probabilità di ottenere in un lancio la somma $9$ con quella di ottenere la somma $10$.**

`Casi possibili:`

Per determinare i casi possibili dobbiamo usare le disposizioni con ripetizione perché ci interessa l'ordine e $k \lesseqgtr n$.

$$D_{6,3} = 6^3 = 216$$

`Casi favorevoli:`

Per determinare i casi favorevoli dobbiamo tenere in considerazione le diverse terne, che in somma danno 9 e 10, e le loro permutazioni.

1. **Somma 9**
   $225 : P3(2) = \frac{3!}{2!} = 3 \Rightarrow 3$ terne
   $333 :\Rightarrow 1$ terna
   $234 : P_3 = 6 \Rightarrow 6$ terne
   $144 : P3(2) = \frac{3!}{2!} = 3 \Rightarrow 3$ terne

$126 : P_3 = 6 \Rightarrow 6$ terne
$125 : P_3 = 6 \Rightarrow 6$ terne
$= 25$ terne

2. **Somma 10**
   $136 : P_3 = 6 \Rightarrow 6$ terne
   $145 : P_3 = 6 \Rightarrow 6$ terne
   $226 : P3(2) = \frac{3!}{2!} = 3 \Rightarrow 3$ terne
   $235 : P_3 = 6 \Rightarrow 6$ terne
   $244 : P3(2) = \frac{3!}{2!} = 3 \Rightarrow 3$ terne
   $334 : P3(2) = \frac{3!}{2!} = 3 \Rightarrow 3$ terne
   $= 27$ terne

La probabilità di ottenere somma $10$ è pari a $\frac{27}{216}$ mentre la probabilità di ottenere somma $9$ è pari a $\frac{25}{216}$, perciò è maggiore la probabilità di ottene come somma $10$.

### ▷ Ordinam PNI 2014 -Q3

**Nello sviluppo di $(2a^2 - 3b^3)^n$ compare il termine $-1080a^4b^9$. Qual'è il valore di $n$?**

Con l'uso della formula del binomio di Newton:

$$(2a^2 - 3b^3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2a^4)^{n-k}(-3b^3)^k$$

E affinche in questo sviluppo sia presente $-1080a^4b^9$ $n$ e $k$ devono valere rispettivamente $5$ e $3$
infine sostituendo questi valori nella formula otterremo il termile iniziale:

$$-1080a^4b^9.$$

### ▷ Ordinam PNI 2010 -Q8

**Se $n > 3$ e $\left(\begin{array}{c} n \\ n-1 \end{array}\right); \left(\begin{array}{c} n \\ n-2 \end{array}\right); \left(\begin{array}{c} n \\ n-3 \end{array}\right)$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di $n$?**

se:
$\left(\begin{array}{c} n \\ n-1 \end{array}\right) = \frac{n!}{(n-1)!1!} = n;$
$\left(\begin{array}{c} n \\ n-2 \end{array}\right) = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)}{2};$
$\left(\begin{array}{c} n \\ n-3 \end{array}\right) = \frac{n!}{(n-3)!3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$
Essendo in progresssione aritmetica, poniamo:
$\left(\begin{array}{c} n \\ n-3 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c} n \\ n-2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} n \\ n-2 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c} n \\ n-1 \end{array}\right)$
da cui si ricava:
$n^2 - 9n + 14 = 0$
$n = 7 \vee n = 2$, l'unica soluzione accettabile è n=7.

# 2 Problemi generali

## Disposizioni semplici

Le disposizioni semplici di n elementi distinti di classe k sono tutti i possibili gruppi che si possono formare con k elementi, presi fra gli n, tali che ogni gruppo è diverso dagli altri per elementi contenuti o per il loro ordine.
Esempio:
**In quanti modi si possono disporre 7 scatole in gruppi da 5?**
$D_{7,5} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

## Disposizioni con ripetizione

Le disposizioni con ripetizione di n elementi di classe k sono tutti i possibili gruppi che si possono formare con k elementi anche ripetuti, presi fra gli n, tali che ogni gruppo è diverso dagli altri per elementi contenuti o per il loro ordine.
Esempio:
**Quante cifre di 5 elementi si possono formare tali che siano un numero da 0 a 9?**
$D_{10,7} = 10^5 = 100000$

## Permutazioni semplici

Le permutazioni semplici di n elementi distinti sono tutti i gruppi formati dagli n elementi, che differiscono per il loro ordine.
Esempio:
**In quanti modi si possono disporre sei persone in fila?**
$P_6 = 6! = 720$

## Permutazioni con ripetizione

Le permutazioni con ripetizione di n elementi di cui h,k,... ripetuti, sono tutti i gruppi formati dagli n elementi che differiscono per l'ordine in cui si presentano gli elementi distinti e la posizione che occupano gli elementi ripetuti.
Esempio:
**Quanti anagrammi, anche senza significato, si possono formare con la parola: MENTE?**
$P_5^2 = \frac{5!}{2!} = 60$

## Combinazioni semplici

Le combinazioni semplici di n elementi distinti di classe k sono tutti i possibili gruppi che si possono formare con k elementi, presi fra gli n, e tali che ogni gruppo è diverso dagli altri per almeno un elemento contenuto.
Esempio:
**In quanti modi possiamo scegliere 4 giocattoli, da dare a un bambino, fra 8 da comprare?**
$C_{8,4} = \frac{(8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5)}{4!} = 70$

## Combinazioni con ripetizione

Le combinazioni con ripetizione di n elementi distinti di classe k sono tutti i possibili gruppi che si possono formare con k elementi presi fra gli n, tali che ogni elemento di un gruppo può essere ripetuto fino a k volte, inoltre non interessa l'ordine.
Esempio:
**In quanti modi diversi possiamo distribuire 3 palline rosse in 4 cassetti?**
$C'_{4,3} = C_{6,3} = 20$

## Problema caratteristico con i dadi

**Qual'è la probabilità che lanciando un dado due volte esca lo stesso numero in entrambi i casi?**

Prendiamo come esempio iniziale il caso esca due volte il numero 1:

$$p(1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Infine moltiplichiamo il risultato ottenuto per il numero di coppie che si possono formare, ovvero 6:

$$p(E) = \frac{1}{36} \cdot 6 = \frac{1}{6}$$

## Problema caratteristico con le carte

**Calcola la probabilità che estraendo a caso da un mazzo di 40 carte esca una figura o un 4:**

La probabilità che esca una figura è di:

$$p(E) = \frac{12}{40}$$

La probabilità che esca un 4 è di:

$$p(E) = \frac{4}{40}$$

## Problema caratteristico con le palline colorate

**In un cesto sono presenti 20 palline di colori differenti, 10 sono blu, 4 sono gialle e 6 sono rosse; che probabilità c'è che estraendo tre palline senza reimbussolamento tutte e tre sono rosse? E che solo due sono rosse?**

1. $p(E) = \left(\frac{6}{20} \cdot \frac{5}{19} \cdot \frac{4}{18}\right) = \frac{1}{57}$
2. $p(E) = \left(\frac{6}{20} \cdot \frac{5}{19} \cdot \frac{4}{18}\right) \cdot 3 = \frac{7}{114}$

## Prove ripetute

**Un urna contiene 4 palline bianche, 2 nere e 9 blu, qual'è la probabilità che effettuando 8 estrazioni la pallina bianca si presenti 5 volte?**

$$p_{5,8} = \binom{5}{8}\left(\frac{4}{15}\right)^5\left(\frac{11}{15}\right)^3$$

## Somma logica

**Abbiamo 9 biglietti per un parco divertimenti ,5 biglietti per un parco acquatico e 6 biglietti per un parco termale. Estraiamo consecutivamente due biglietti da assegnare come primo e secondo premio per un gioco.**

Calcola la probabilità che :

1. siano biglietti per lo stesso parco;
2. nessun biglietto sia per il parco acquatico;
3. almeno un biglietto sia per il parco divertimenti;
4. il primo biglietto sia per il parco termale e l'altro per il parco divertimenti o il parco acquatico (tratto dal libro pagina 85)

1. $P(E_1) = \dfrac{C_{9,2} + C_{5,2} + C_{6,2}}{C_{20,2}} = \dfrac{61}{190}$
2. $P(E_2) =$
3. $P(E_3) =$
4. $P(E_4) = \dfrac{6}{20} \cdot (\dfrac{9}{19} + \dfrac{5}{19}) = \dfrac{21}{95}$

## Prodotto logico

**Se si estraggono da un mazzo di 40 carte due carte. Quale sarà probabilità che escano due sette?**

- senza reimmisione $\Rightarrow p = \dfrac{4}{40}\dfrac{3}{39} = \dfrac{1}{130}$

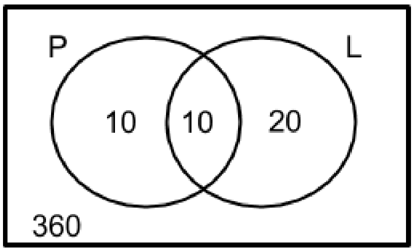
- con reimmisione $\Rightarrow p = \dfrac{4}{40}\dfrac{4}{40} = \dfrac{1}{100}$

## Probabilità condizionata

**Una macchina produce pezzi meccanici e su una produzione di 400 pezzi, 20 sono difettosi per peso, 30 per lunghezza e 360 perfetti. Calcola la probabilità che prendendo a caso un pezzo:**

1. **sia difettoso (evento A);**
2. **abbia entrambi i difetti (evento B);**
3. **sia difettoso per peso, sapendo che anche la lunghezza non sia perfetta (evento C)**

Il problema così considerato ci fa capire che 10 pezzi sono difettosi sia per lunghezza che per peso.
Per questi problemi è utile fare un rappresentazione di Eulero-Venn:




1. Casi possibili:400
   Casi favorevoli:40

   $$P(A) = \frac{40}{400} = \frac{1}{10}$$

2. Casi possibili:400
   Casi favorevoli:10

   $$P(B) = \frac{10}{400} = \frac{1}{40}$$

3. $P(C) = P(P|L) = \dfrac{P(P \cap L)}{P(L)} = \dfrac{\frac{10}{400}}{\frac{30}{400}} = \dfrac{1}{3}$

### Teorema di Bays

**Una macchina effettua l'$80\%$ della produzione mentre la parte restante la effettua un'altra macchina. Il $10\%$ dei pezzi prodotti dalla prima e dalla seconda macchina sono difettosi. Qual'è la probabilità che preso un pezzo difettoso a caso esso provenga dalla prima macchina?**

Come prima cosa calcoliamo la probabilità di etrarre un pezzo difettoso:

$$p(E) = 0.8 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.1 = 0.1$$

Poi la probabilità che la prima macchina produca un pezzo difettoso:

$$p(E_1 \cap E) = 0.8 \cdot 0.1 = 0.08$$

Infine la probabilità che il pezzo difettoso provenga dalla prima macchina è di:

$$p(E_1 \mid E) = \frac{0.08}{0.1} = 0.08 \cong 80\%$$

## 3 Formulario

**Disposizioni semplici**
$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$
**Disposizioni con ripetizione**
$D'_{n,k} = n^k$
**Permutazioni semplici**
$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = n!$
**Permutazioni con ripetizione**
$P_n'^{h,k,..} = \dfrac{n!}{h! \cdot k! \cdot ..}$
**Combinazioni semplici**
$C_{n,k} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{D_{n,k}}{P_k} = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$

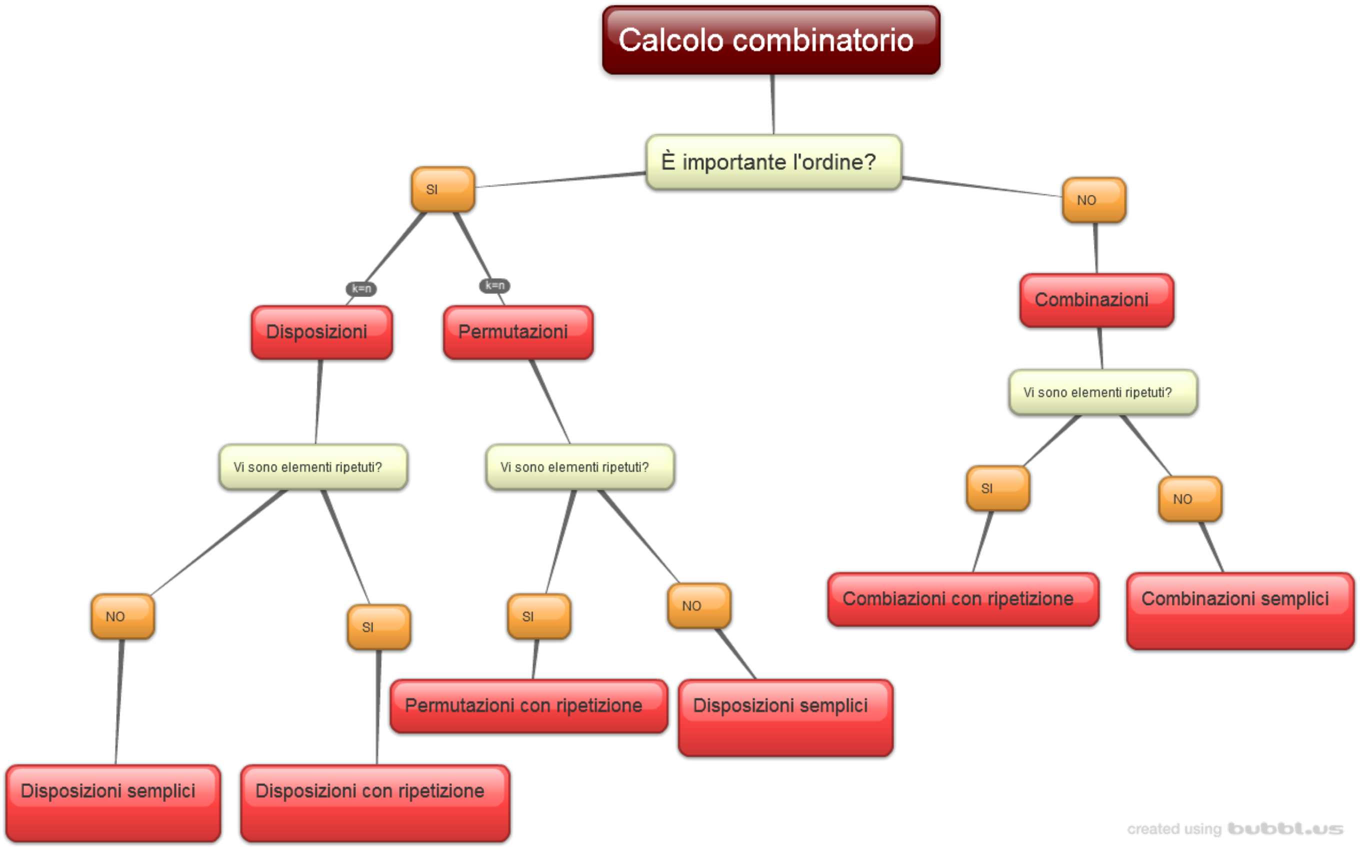
**Combinazioni con ripetizione**
$$C'_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \left( \begin{array}{c} n+k-1 \\ k \end{array} \right) = \frac{(n+k-1)\cdot(n+k-2)\cdot ... \cdot(n+1)}{k!}$$
**Legge dei tre fattoriali**
$$\left( \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$
**Legge della classi complementari**
$$\left( \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} n \\ n-k \end{array} \right)$$
**Formula di ricorrenza**
$$\left( \begin{array}{c} n \\ k+1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \cdot \frac{n-k}{k+1}$$
**Formula di Stifel**
$$\left( \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right)$$
**Probabilità**
$$p(E) = \frac{f}{u}$$
**Evento contratio**
$$p(\overline{E}) = 1 - p(E)$$
**Somma logica di eventi**
$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$$
**Probabilità condizionata**
$$P(E_1|E_2) = \frac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_2)}$$
**Prodotto logico di eventi**
$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2|E_1)$$
$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2)$$
**Probelma delle prove ripetute**
$$p_{(k,n)} = \left( \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) p^k q^{n-k}$$
**Teorema di Bayes**
$$p(E_i|E) = \frac{p(E)\cdot\,(E|E_i)}{p(E)}$$

# 4 Glossario

aleatorio
campione
caso
coefficiente
combinazioni semplici

combinazioni con ripetizione
compatibili
contrario
correlato
disintegrazione
disposizioni semplici
disposizioni con ripetizione
evento
fattoriale
frequenza
gioco
incompatibile
indipendenti
intersezione
ordine
permutazioni semplici
permutazioni con ripetizione
prove ripetute
sequenze
spazio campionario
somma logica di eventi
statistica
triangolo di Tartaglia

## 5 Mappe



Calcolo combinatorio
È importante l'ordine?
SI
NO
k=n
k=n
Disposizioni
Permutazioni
Combinazioni
Vi sono elementi ripetuti?
Vi sono elementi ripetuti?
Vi sono elementi ripetuti?
NO
SI
SI
NO
SI
NO
Disposizioni semplici
Disposizioni con ripetizione
Permutazioni con ripetizione
Disposizioni semplici
Combiazioni con ripetizione
Combinazioni semplici
created using bubbl.us


Il calcolo della probabilità
Concezione statistica
f(E)=m/n
m = numero di volte in cui si è veificato il fenomeno
n = numero delle prove effettuate
Concezione soggettiva
p(E)=P/V
P = prezzo che una persona ritiene equo pagare
V = vincità che riceverà
Schema delle prove ripetute
Teorema di bayes
Formula di disintegrazione
Concezione classica
p(E)= f/u
f = casi favorevoli
u = casi possibili
Somma logica
Teorema della probabilità totale
Prodotto logico
Teorema della probabilità composta
created using bubbl.us